延安大学

二〇一七年招收攻读硕士学位研究生入学考试业务课试题

适用专业名称：计算数学

考试科目名称：高等数学　　科目代码：601

注意事项：

1、请将答案直接做到答题纸上，做在试题纸上或草稿纸上无效。

2、除答题纸上规定的位置外，不得在卷面上出现姓名、考生编号或其它标志。

3、本试题共 3 页，满分 150 分，考试时间 180 分钟。

一、填空题（每小题 **4** 分，共 **20** 分）

1、以曲面 $z=f(x,y)<0$ 为顶，xoy 面上的有界闭区域 D 为底的曲顶柱体的体积可用二重积分表示为__________，其中 σ 为区域 D 的面积；

2、设 $f(x)=(1+xy)^y$，则 $f'(1,1)=$__________；

3、交换二次积分的积分次序：

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^1 f(x,y)dy=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;$$

4、直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角为__________；

5、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 3, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 2 处收敛于________。

二、选择题（每小题 **4** 分，共 **20** 分）

1、以下结论正确的是(　　)。

A、若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点；

B、若 $f'(x_0)$ 不存在，则 x_0 非 $f(x)$ 的极值点；

C、若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的稳定点；

D、若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$。

2、函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（　　）

A、$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；　　B、$f(x)-f(0)=Ax+o(x)$，其中 A 是常数；

C、$f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 都存在；　　D、$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在。

3、下列级数条件收敛的是(　　)。

A、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$；　B、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$；　C、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$；　D、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$。

4、设 D 是由 $|x|=2$，$|y|=1$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D xy^2dxdy=($　　$)$。

A、$\frac{4}{3}$；　　B、$\frac{8}{3}$；　　C、$\frac{16}{3}$；　　D、0 。

5、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$　（　　）。

A、处处连续；　　B、处处有极限，但不连续；

C、仅在(0，0)点连续；　　D、除(0，0)点外处处连续。

三、计算题（每小题 **8** 分，共 **40** 分）

1、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$；

2、设 $x^3+y^3-3xy=1$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$；

3、求积分 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

4、设 D 由 $x=y,xy=1,y=2$ 围成的闭区域，求二重积分 $\iint_D ydxdy$。

5、$\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$、$(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界。

四、(**10** 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)。$$

五、(**10** 分）设 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线

与曲线$y=x^2-x+1$在该点的切线重合，求函数$y=y(x)$。

六、(10 分) 利用函数图形的凹凸性证明不等式：

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},\quad (x>0,y>0,x\neq y)\text{。}$$

七、(10 分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛区间、收敛域，并求其和函数。

八、(10 分) 计算$\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$z=0$与$z=3$之间的圆柱体$x^2+y^2\le 9$的整个表面的外侧。

九、(10 分) 设$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

十、(10 分) 设摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)(0\le t\le 2\pi)$，

1、求摆线一拱的弧长；

2、求摆线一拱与x轴所围成图形的面积；

3、求摆线一拱与x轴所围成图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积；

4、求摆线一拱与x轴所围成图形绕x轴旋转一周所得旋转面的面积。